

*Pairs Trading*

Ruilova

Introdução

O modelo

Futuro

Bibliografia

# Cointegração e *Pairs Trading*

Juan Carlos Ruilova

`juan.teran@itau-unibanco.com.br`

Itaú - Unibanco

Outubro de 2009

## Resumo

- Mostramos como as técnicas de cointegração são usadas para arbitragem estatística em séries financeiras.
- Identificamos os principais problemas e riscos desta abordagem.
- Propomos diversas alternativas e temas a serem investigados com séries cointegradas.

*Pairs Trading*

Ruilova

Introdução

O modelo

Futuro

Bibliografia

1 Introdução

2 O modelo

3 Futuro

4 Bibliografia

*Pairs Trading*

Ruilova

Introdução

O modelo

Futuro

Bibliografia

1 Introdução

2 O modelo

3 Futuro

4 Bibliografia

# O modelo CAPM



Pairs Trading

Ruilova

Introdução

O modelo

Futuro

Bibliografia

- O retorno de um ativo no CAPM (*Capital Asset Pricing Model*) pode ser separado em dois componentes, sistemático e não sistemático ou residual.

$$r_p = \beta r_m + \theta_p.$$

- $\theta_p$  é a componente não explicável pelo mercado.
- As componentes de mercado e residual são assumidas não correlacionadas.

# Neutralidade ao Mercado

## Pairs Trading

### Ruílova

### Introdução

### O modelo

### Futuro

### Bibliografia

- Dizemos que uma estratégia é neutra ao mercado quando seus retornos são não correlacionados com os retornos do mercado.
- No contexto do CAPM, numa carteira neutra ao mercado temos que  $\beta = 0$ .

- Dizemos que uma estratégia é neutra ao mercado quando seus retornos são não correlacionados com os retornos do mercado.
- No contexto do CAPM, numa carteira neutra ao mercado temos que  $\beta = 0$ .

## Exemplo

Considere duas carteiras  $A$  e  $B$ , com betas positivos  $\beta_A$  e  $\beta_B$ . Construímos a carteira  $AB$  com  $r$  posições vendidas de  $A$  e 1 posição comprada de  $B$ ,  $r_{AB} = (-r\beta_A + \beta_B) r_m + (-r\theta_A + \theta_B)$ . Se  $r = \frac{\beta_B}{\beta_A}$ , então a carteira  $AB$  é neutra ao mercado.

- Uma extensão natural ao CAPM é quando temos múltiplos fatores de exposição ou sensibilidade.

$$r = \beta_1 r_1 + \beta_2 r_2 + \dots + \beta_2 r_2 + r_e.$$

onde  $r_e$  é o retorno idiosincrático ou específico do ativo que não é explicado pelos fatores do modelo.

- É razoável supor que o retorno específico de um ativo não seja correlacionado com os fatores ou com os retornos específicos de qualquer outro ativo do modelo (*APT*).
- De acordo com o *APT*, se duas ações têm os mesmos fatores de risco então seu retorno esperado é o mesmo.

- Para construir esta estratégia neutra ao mercado usamos uma posição comprada e outra vendida (carteira *long-short*).
- O *spread* é a componente residual da carteira neutra ao mercado.

- Para construir esta estratégia neutra ao mercado usamos uma posição comprada e outra vendida (carteira *long-short*).
- O *spread* é a componente residual da carteira neutra ao mercado.

## Cointegração

Considere duas séries temporais  $X_t$  e  $Y_t$ , integradas de ordem 1,  $I(1)$ . Dizemos que  $X_t$  e  $Y_t$  são cointegradas se existe uma combinação linear,  $Z_t = Y_t - \gamma X_t$ , tal que,  $Z_t$  é  $I(0)$ .

- Para construir esta estratégia neutra ao mercado usamos uma posição comprada e outra vendida (carteira *long-short*).
- O *spread* é a componente residual da carteira neutra ao mercado.

## Cointegração

Considere duas séries temporais  $X_t$  e  $Y_t$ , integradas de ordem 1,  $I(1)$ . Dizemos que  $X_t$  e  $Y_t$  são cointegradas se existe uma combinação linear,  $Z_t = Y_t - \gamma X_t$ , tal que,  $Z_t$  é  $I(0)$ .

- A idéia de cointegração, entre outras, fez com que Engle e Granger ganhassem o prêmio Nobel em Economia em 2003.

- Na prática é razoável pensar que duas séries com características similares ou do mesmo setor sejam cointegradas.
- Para escolher os pares é recomendado fazer uma identificação empírica ou fundamentalista e também uma identificação teórica.
- A dinâmica de cointegração é capturada pela noção de correção de erros (Teorema de representação de Granger).

$$y_t - y_{t-1} = \alpha_y (y_{t-1} - \gamma x_{t-1}) + \epsilon_{y_t}$$

$$x_t - x_{t-1} = \alpha_x (y_{t-1} - \gamma x_{t-1}) + \epsilon_{x_t}$$

# ECM (*Error Correction Model*)

- Representação ECM:

$$y_t - y_{t-1} = \alpha_y (y_{t-1} - \gamma x_{t-1}) + \epsilon_{y_t}$$

$$x_t - x_{t-1} = \alpha_x (y_{t-1} - \gamma x_{t-1}) + \epsilon_{x_t}$$

- Na parte de correção de erros  $\alpha_y (y_{t-1} - \gamma x_{t-1})$ , temos:
  - O fator  $y_{t-1} - \gamma x_{t-1}$  representa o desvio do equilíbrio de longo prazo (spread),
  - $\gamma$  é o coeficiente de cointegração, e,
  - $\alpha_y$  é a velocidade de correção de erros.

- Stock e Watson tratam cointegração a través do modelo de tendências comuns:

$$y_t = n_{y_t} + \epsilon_{y_t}$$

$$x_t = n_{x_t} + \epsilon_{x_t}$$

de onde,

$$y_t - \gamma x_t = (n_{y_t} - \gamma n_{x_t}) + (\epsilon_{y_t} - \gamma \epsilon_{x_t}) \quad (1)$$

se  $n_{y_t} = \gamma n_{x_t}$ , então (1) é estacionária.

# Pairs Trading



Pairs Trading

Ruilova

Introdução

O modelo

Futuro

Bibliografia

- O primeiro uso desta técnica é atribuída a Nunzio Tartaglia do Morgan Stanley a meados dos 80.
- A idéia é vender o ativo sobre-valorizado e comprar o ativo sub-valorizado de forma “relativa”.
- Os preços não são importantes, mas sim o spread.
- Quanto maior é o spread, maior é a probabilidade de precificação errada e portanto maior o ganho potencial.

# Pairs Trading



Pairs Trading

Ruilova

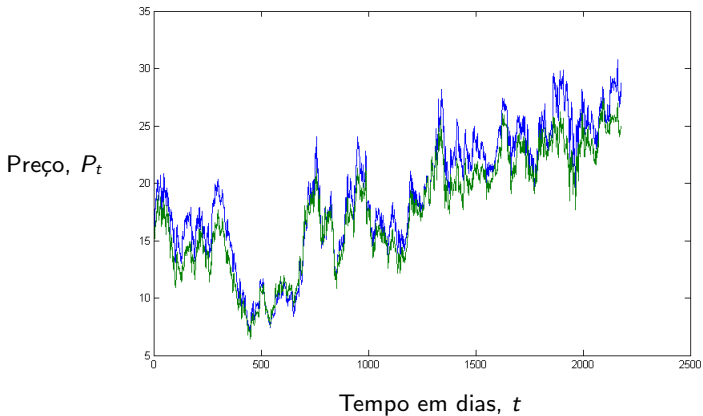
Introdução

O modelo

Futuro

Bibliografia

Figura: Preços das ações da companhia Eletrobrás (ELET3 e ELET6)



# Pairs Trading



## Pairs Trading

Ruilova

Introdução

O modelo

Futuro

Bibliografia

- *Arbitragem Estatística*. Posicionar-se quando existe uma má precificação, ou seja, quando o *spread* está longe de seu valor médio.
- Embora esta estratégia é chamada de arbitragem, ela possui risco.

- *Arbitragem Estatística*. Posicionar-se quando existe uma má precificação, ou seja, quando o *spread* está longe de seu valor médio.
- Embora esta estratégia é chamada de arbitragem, ela possui risco.

## Dúvidas

- Como identificar ativos cointegrados?
- Que valores usamos para a construção da carteira neutra ao mercado?
- Quando o spread diverge significativamente de sua média?

*Pairs Trading*

Ruilova

Introdução

O modelo

Futuro

Bibliografia

1 Introdução

2 O modelo

3 Futuro

4 Bibliografia

- Sejam dois papeis com preços  $P_t^A$  e  $P_t^B$ , cointegrados, com coeficiente de cointegração  $\gamma$ .
- O spread é dado por  $s_t = \log P_t^A - \gamma \log P_t^B$ .
- Se  $s_t < \delta$ , então *long A* e *short  $\gamma B$* .
- Se  $s_t > \delta$ , então *short A* e *long  $\gamma B$* .
- O *bid-ask spread* pode server como limite para para  $\delta$ .

## Exemplo

Considere  $\gamma = 1,5$ ,  $\delta = 0,045$ ,

No tempo  $t$ :  $Bid_A = 19,5$ ,  $Ask_B = 7,46$ ,

No tempo  $t + n$ :  $Ask_A = 20,10$ ,  $Bid_B = 7,17$ ,

*Bid-Ask Spread* médio para A: 0,0005 (5 *basis points*),

*Bid-Ask Spread* médio para B: 0,0010 (10 *basis points*),

### **A Estrategia**

Custo médio de *Bid-Ask Spread*:

$0,0005 + 1,5 \times 0,0010 = 0,002$  (20 *basis points*)

$s_t = \log(19,5) - 1,5 \times \log(7,46) = -0,045$

$s_{t+n} = \log(20,1) - 1,5 \times \log(7,17) = 0,045$

retorno =  $s_{t+n} - s_t = 0,09$

- Grande Quantidade de papeis.
- A través de regras heurísticas pode-se chegar a obter dois grupos: potencialmente integrados e potencialmente não cointegrados.
- A idéia é obter uma medida de cada par simples e que pode conter os aspectos fundamentais de cada firma (APT).
- Depois de obtidos os 2 grupos, podem se rodar testes de *tradability* ou testes de cointegração.

Considere o modelo de tendências comuns:

$$y_t = n_{y_t} + \epsilon_{y_t}$$

$$x_t = n_{x_t} + \epsilon_{x_t}$$

Se  $y_t$  e  $x_t$  estão cointegrados, então,  $n_{y_t} = \gamma n_{x_t}$

Considere o modelo de tendências comuns:

$$y_t = n_{y_t} + \epsilon_{y_t}$$

$$x_t = n_{x_t} + \epsilon_{x_t}$$

Se  $y_t$  e  $x_t$  estão cointegrados, então,  $n_{y_t} = \gamma n_{x_t}$

- As inovações derivadas das tendências comuns devem ser perfeitamente correlacionadas.
- O coeficiente de cointegração  $\gamma$  pode ser obtido mediante uma regressão das inovações dos retornos das tendências comuns.

$$r_t = r_t^C + r_t^S$$

- Note que as tendências comuns podem ser estacionárias ou não estacionárias enquanto as componentes específicas têm que ser estacionárias.
- Para as séries ser cointegradas, a primeira diferença da componente específica não pode ser ruído branco.
- Se dois ativos têm o mesmo perfil de exposição a fatores de risco, satisfaz a condição necessária para cointegração.

$$\begin{aligned}r_A - \gamma r_B &= (r_A^C - \gamma r_B^C) + (r_A^S - \gamma r_B^S) \\r_{port} &= r_{port}^C + r_{port}^S\end{aligned}$$

- Note que se os ativos são cointegrados, então,  $r_{port}^C = 0$  e a componente específica deve ser estacionária.

# Medida para Seleção de Pares



Pairs Trading

Ruilova

Introdução

O modelo

Futuro

Bibliografia

$$\begin{aligned} |\rho| &= \left| \frac{\text{cov}(r_A, r_B)}{\sqrt{\text{var}r_A \text{var}r_B}} \right| \\ &= \left| \frac{b_A F b_B}{\sqrt{(b_A F b_B)(b_A F b_B)}} \right| \end{aligned}$$

- A correlação pode ser interpretada geométricamente como o cosseno do ângulo entre os vetores.
- Dificilmente duas ações estão perfeitamente alinhadas (mesma firma).
- Notícias podem mudar drasticamente os fundamentos de uma firma fazendo com que a estrutura de correlação se quebre.

# Medida para Seleção de Pares



Pairs Trading

Ruilova

Introdução

O modelo

Futuro

Bibliografia

Outra medida é o *SNR* (Signal-to-Noise Ratio) do spread,

$$s_t = r_A - \gamma r_B.$$

$$SNR = \frac{\sigma_{stationary}}{\sigma_{nonstationary,t}}$$

- Quanto maior o *SNR* maior a chance dos pares serem cointegrados.
- Note que o desvio padrão da parte não estacionária depende do tempo (*stopping time orders*).

$$\log(P_t^A) - \gamma \log(P_t^B) = \mu + \epsilon_t$$

- A medida r-quadrado da regressão entre duas séries não é uma boa medida (Regressão Espúria), Granger e Newbold.
- Testes de Cointegração vs Testes de *Tradability*.
  - Estimaco das Relaco linear entre as sérias.
  - Estacionariedade dos resíduos.
- A presena do premio  $\mu$  pode se dever a liquidez, *trading intraday*, etc.

# Determinação da Relação Linear



Pairs Trading

Ruilova

Introdução

O modelo

Futuro

Bibliografia

- $\gamma$  pode ser estimada da regressão dos retornos das duas séries cointegradas ou também usando sua tendência comum no APT,  $\gamma = \frac{b'_B F b_A}{b'_A F b_A}$ .
- Note que no caso da regressão, ambas as séries são estocásticas e geralmente apresentam comportamento heteroscedástico na volatilidade.
- Para a regressão costuma-se usar preços no fechamento ou preços ponderados pelo volume (minimiza *outliers*).
- Entre dois  $\gamma$ 's estimados, prefere-se o maior.
- Usamos  $\mu$  somente quando é significativamente diferente de zero.

# Testando Resíduos para *Tradability*

## Pairs Trading

### Ruilova

### Introdução

### O modelo

### Futuro

### Bibliografia

- O número de visitas ao zero (*zero-crossing*) nos permite caracterizar a reversão à média.
- Quanto maior o número de visitas ao zero, maior o SNP, mas, menor tempo posicionado na carteira do *spread*.
- Temos alguns resultados sobre o número de visitas ao zero. Movimento Browniano, Processos ARMA, etc.

# Regra de *Stopping Time*



Pairs Trading

Ruilova

Introdução

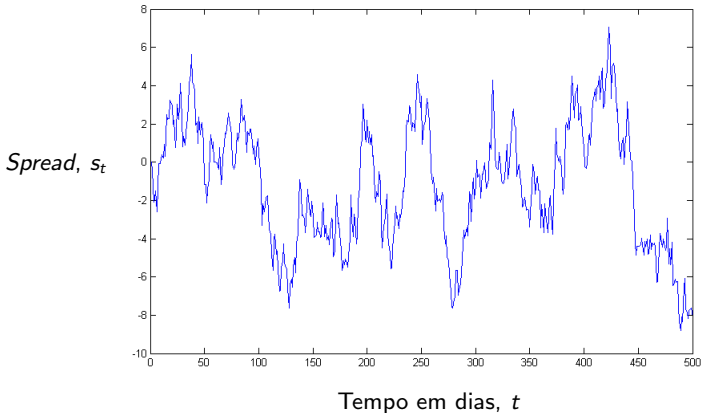
O modelo

Futuro

Bibliografia

- Podemos modelar a distribuição do tempo necessário entre visitas ao zero usando *bootstrap*.
- Com isso evitamos o fato de ter uma única realização.
- Estabelecemos um tempo limite para reversão, baseado na distribuição encontrada.
- Embora regras de *stop gain* e *stop loss* são importantes, uma regra de *stopping time* pode nos proteger também de possíveis quebras estruturais.

Figura: *Spread* de uma carteira *Long-Short*



*Pairs Trading*

Ruilova

Introdução

O modelo

Futuro

Bibliografia

1 Introdução

2 O modelo

3 Futuro

4 Bibliografia

# Algumas Áreas de Pesquisa

*Pairs Trading*

Ruilova

Introdução

O modelo

Futuro

Bibliografia

- Cointegração Dinâmica? *Spread* ou Relação Linear?
- Quebras Estruturais.
- Regras de *Stop*.
- Fatores Latentes.

*Pairs Trading*

Ruilova

Introdução

O modelo

Futuro

Bibliografia

1 Introdução

2 O modelo

3 Futuro

**4 Bibliografia**



Granger, C. W. and Newbold, P. (1974). "Spurious Regression in Econometrics." *Journal of Econometrics*. 2, 1974, 111-120.



Harvey, A. C. (1991). *Forecasting, Structural Time Series Model and the Kalman Filter*. Cambridge University Press, Cambridge, UK.



Engle, Robert F. and Granger, C. W. (1987). "Co-integration and Error Correction: Representation, Estimation and Testing." *Econometrica*. 55, N° 2, Marzo 1987, 251-276.



Stock, James H. and Watson, Mark W. (1988). "Testing for Common Trends." *Journal of the American Statistical Association*. 83, N° 404, December 1988, 1097-1107.



Vidyamurthy, G. (2004). *Pairs Trading: Quantitative Methods and Analysis*.

John Wiley & Sons, New Jersey.