



## Aplicação das Equações Diferenciais em Estratégias Quantitativas

Seminário FGV

**Marcos Elias**

17/Junho/2009



# CAPÍTULOS

Noções Gerais sobre Equações Diferenciais (páginas 3,4 e 5)

Equação de Black & Scholes: Estocástica ou a Derivadas Parciais? (páginas 7 e 8)

O Que Mais Precisamos Saber Antes de Implementações Práticas (páginas 10 e 11)

Um Exemplo de Aplicação Prática (páginas 13,...)

## Algumas considerações básicas sobre equações diferenciais :

- São equações cujas incógnitas são funções (ou processos) que aparecem na forma de suas respectivas derivadas. A solução de uma equação diferencial é a determinação da função-incógnita de forma que a equação se torne verdadeira. Exemplo:  $((\cos(x))' = -\cos(x)$ , então  $y=\cos(x)$  é a solução da ED  $y''+y=0$

- EDO (Ordinárias) contém funções de apenas 1 variável (geralmente, o tempo):

$$m \frac{d^2x(t)}{dt^2} = F(x(t)),$$

- EDP (Parciais) contém funções com mais de 1 variável:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

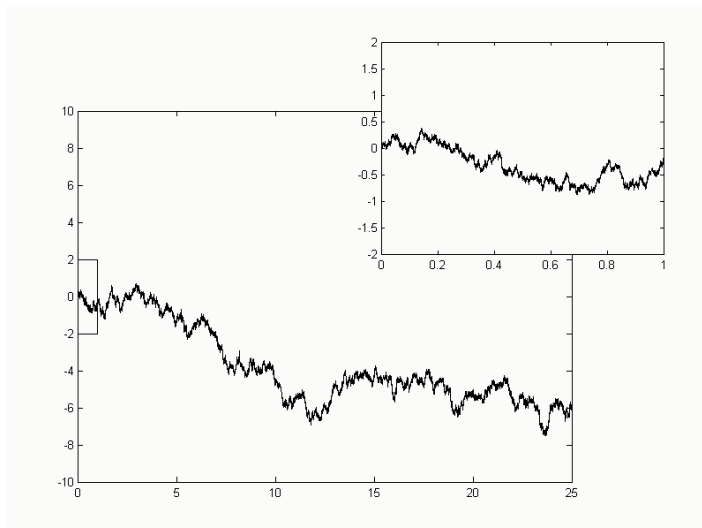
- Estocástica: incógnita é um “processo estocástico”, assim como o é a sua solução:

$$dx(t) = a(x, t) dt + b(x, t) dW_t$$

- As soluções das ED podem existir ou não, e existindo, podem ser únicas ou não;
- ED informam como variações de uma grandeza afetam outras grandezas relacionadas. Constituem bons modelos para processos que se alteram ao longo do tempo;
- São mais difíceis de resolver do que as equações algébricas comuns. Apenas as ED mais simples admitem soluções explicitadas por fórmulas. Soluções numéricas aproximadas com utilização de computadores se constituem em prática comum;

## Equações Diferenciais Estocásticas

- Em uma equação diferencial estocástica a incógnita não é uma função, mas sim um processo estocástico. E qual a diferença entre uma função e um processo estocástico? Em uma função, a cada instante  $t$ , associa-se um determinado valor, e, em um processo estocástico, a cada instante  $t$ , associa-se uma distribuição de valores;
- Pode ser um Processo de Wiener (em homenagem a Norbert Wiener, fundador da cibernética), que é caracterizado pelas seguintes propriedades:
  - É contínuo no tempo;
  - É um Processo de Markov, ou seja, basta termos sua distribuição de probabilidades e seu valor atual para se calcular o valor futuro;
  - Cada incremento no processo é independente dos incrementos anteriores;
  - Mudanças no processo sobre qualquer intervalo de tempo são normalmente distribuídas, com uma variância que aumenta linearmente com o intervalo de tempo;



Um gráfico de um Processo de Wiener, com zoom destacando um subintervalo, de forma a mostrar que a curva não se suaviza quando é ampliada.



## Equações Diferenciais Estocásticas

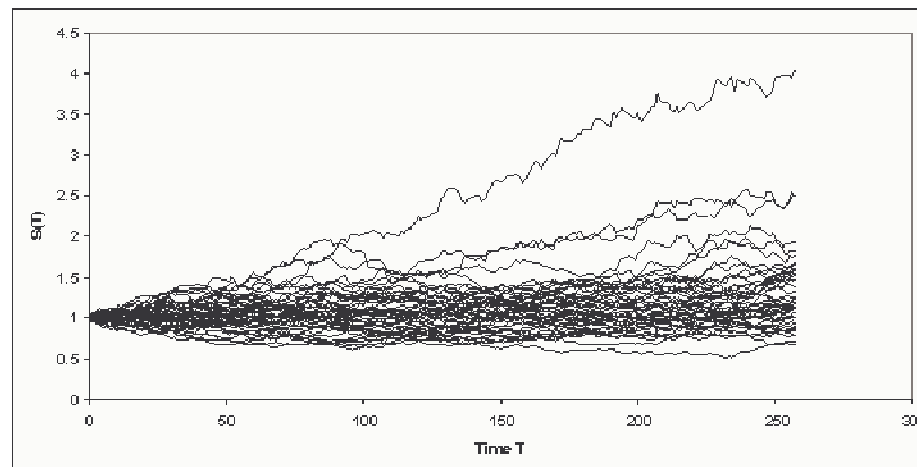
- Tomemos a sua forma mais típica, quando usada em probabilidade e matemática financeira:

$$dx(t) = a(x, t) dt + b(x, t) dW_t$$

Onde  $x(t)$  é o processo estocástico contínuo no tempo (chamado processo de difusão);

- Em que  $W_t$  denota um Processo de Wiener ou um movimento Browniano padrão.  $W_t$  não é diferenciável e, portanto, requer uma regras particulares de Cálculo e matemática extremamente complexa;
- Podemos interpretá-la da seguinte forma: para um pequeno intervalo de tempo  $\delta$ , o processo estocástico  $x(t)$  modifica seu valor em um montante tal que é normalmente distribuído com expectativa  $\mu(x(t), t) \delta$  e variância  $\sigma(x(t), t)^2 \delta$  e é independente do comportamento passado do processo.
- Um Movimento Browniano Geométrico (MBG) é um processo estocástico no qual o logaritmo da quantidade que varia randomicamente (que é o preço de uma ação, e que é tratado como log-normal porque, logicamente, o preço de uma ação nunca cai abaixo de zero) segue um movimento Browniano ou um processo de Wiener, como na aplicação da famosa equação de Black-Scholes:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$$



# CAPÍTULOS

Noções Gerais sobre Equações Diferenciais (páginas 3,4 e 5)

Equação de Black & Scholes: Estocástica ou a Derivadas Parciais? (páginas 7 e 8)

O Que Mais Precisamos Saber Antes de Implementações Práticas (páginas 10 e 11)

Um Exemplo de Aplicação Prática (páginas 13,...)

## Equação de Black-Scholes:

- Utilizado para a precificação de opções;
- É uma equação que “nasce” estocástica e “morre” a derivadas parciais:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$$



$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0.$$

S é o preço de um ativo.  $V = V(S,t)$  representa o valor de uma opção.  $\mu$  é a taxa de *drift* do ativo,  $\sigma$  é a volatilidade de preços do ativo e  $r$  é a taxa livre de risco.

## Frase de Fisher Black:

I spent many, many days trying to find the solution to that equation. I have a Ph.D. in applied mathematics, but had never spent much time on differential equations, so I didn't know the standard methods used to solve problems like that. I have an A.B. in physics, but I didn't recognize the equation as a version of the "heat equation," which has well-known solutions.

## Equação do Calor:

Descreve a distribuição de calor (ou variação de temperatura) em uma dada região ao longo do tempo. Para uma função  $u(x,y,z)$  de três variáveis espaciais e uma variável de tempo  $t$ , a equação do calor se escreve assim:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - k \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) = 0$$

•  $u$  descreve a temperatura em uma dada localização  $x,y,z$ . Esta função variará ao longo do tempo à medida em que o calor se espalha pelo espaço.  $u=u(t,x,y,z)$  é a temperatura em função do tempo e do espaço.  $du/dt$  é a taxa de variação da temperatura em um ponto no tempo.  $u_{xx}$ ,  $u_{yy}$  e  $u_{zz}$  são as conduções térmicas da temperatura nas direções  $x,y$  e  $z$ . E  $k$  é a condutividade térmica do material.



**Mas como um MGB, dentro de uma equação diferencial estocástica, se transforma numa equações a derivadas parciais, como a equação do calor?**

- O preço de um ativo segue um MGB, e portanto, o preço da opção relativa a este ativo também segue um MGB. O preço da opção também depende do tempo. Utilizando o Lema de Itô\*, é possível encontrar uma equação estocástica que caracterize o processo:

$$\boxed{dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t} \xrightarrow{\text{Lema de Itô}} \boxed{dV = \left( \mu S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) dt + \sigma S \frac{\partial V}{\partial S} dW.}$$

- Através das premissas de que (i) a parcela estocástica da equação pode ser vista como uma “carteira-equivalente” à opção (ou que replique a opção), e como, (ii) em um mercado eficiente, não há possibilidades de arbitragem, então esta carteira pode ser substituída pela taxa de juros, que não é considerada estocástica. Desta forma, uma equação eminentemente estocástica se transforma em uma equação a derivadas parciais, que é a equação do calor:

$$\boxed{\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0.}$$

(\*) O Lema de Itô mostra que a segunda derivada dos termos de um Processo de Wiener se tornam determinísticos através de uma integração estocástica. É a “regra da cadeia” do cálculo ordinário.

# CAPÍTULOS

Noções Gerais sobre Equações Diferenciais (páginas 3,4 e 5)

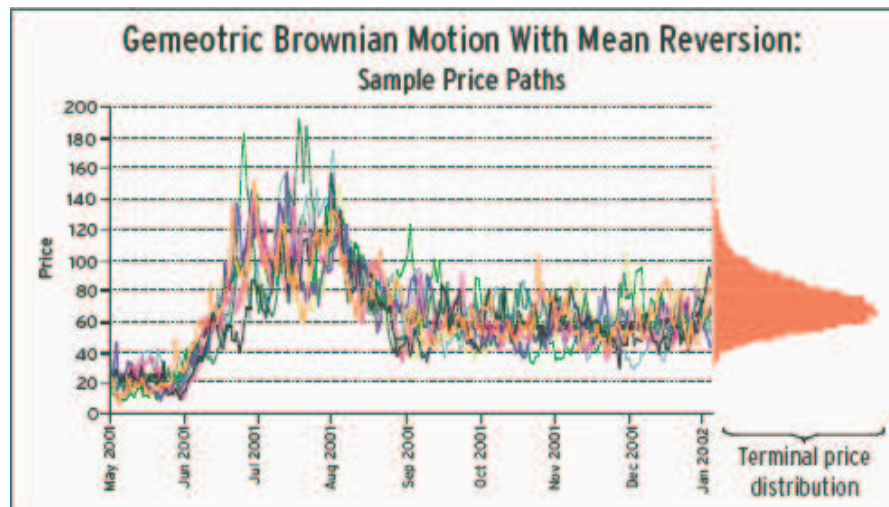
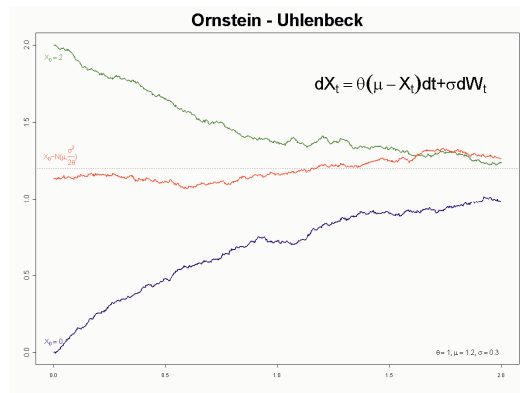
Equação de Black & Scholes: Estocástica ou a Derivadas Parciais? (páginas 7 e 8)

O Que Mais Precisamos Saber Antes de Implementações Práticas (páginas 10 e 11)

Um Exemplo de Aplicação Prática (páginas 13,...)

## O que é Reversão para a Média?

- É provável que, a um evento raro, siga-se um evento menos raro. Ou, em outras palavras, que o desempenho médio de uma ação tenda a convergir “mais para a média” ao longo do tempo;
- Em matemática, o Processo de Ornstein-Uhlenbeck retrata a Reversão para a Média. Este é um processo estocástico ( $x(t)$ ), da seguinte forma:

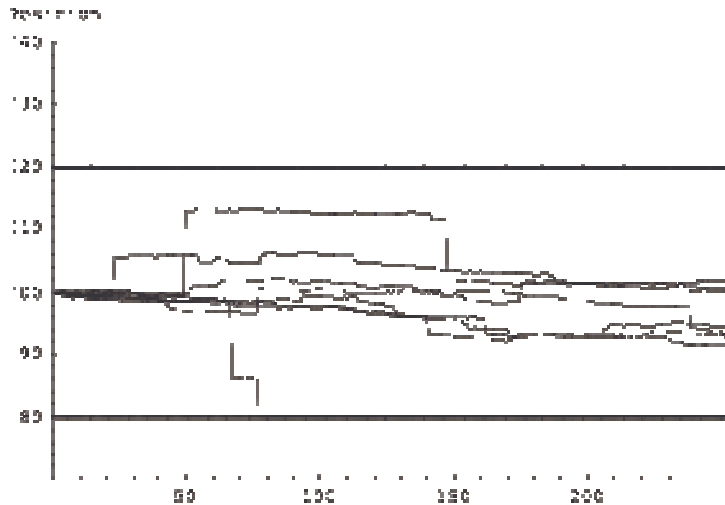


O Processo de Ornstein-Uhlenbeck é um exemplo de Processo Gaussiano, como o Processo de Wiener. No caso de Wiener, o *drift* (pressão) é constante mas no caso de Ornstein-Uhlenbeck, há uma dependência do valor atual do processo: se o valor corrente é maior do que a média de longo prazo, o *drift* é negativo, e se o valor corrente é menor, o *drift* é positivo;



## O que é um *Jump* (ou *Jump-Diffusion*) Process?

- É um tipo de processo estocástico contendo movimentos de grandes saltos, ao invés de pequenos movimentos contínuos;
- Em um processo clássico log-normal de difusão, como aquele considerado em Black-Scholes, os retornos logarítmicos têm uma distribuição normal. Mas na vida real, para o mercado de ações, por exemplo, por conta das falências, dos *turnarounds*, das inversões de fluxo decorrentes das perspectivas econômicas, os processos de *Jumps*, associados à Difusão, nos servem como melhores modelos;



As distribuições que resultam dos *jumps* são leptocúrticas, ou seja, apresentam um pico mais agudo em torno da média e têm caudas gordas, o que indica maior possibilidade de ocorrência de valores extremos.

Exemplos de distribuições como estas são os chamados *Lévy Flights*, descritos por Benoît Mandelbrot em *The Fractal Geometry of Nature*.

# CAPÍTULOS

Noções Gerais sobre Equações Diferenciais (páginas 3,4 e 5)

Equação de Black & Scholes: Estocástica ou a Derivadas Parciais? (páginas 7 e 8)

O Que Mais Precisamos Saber Antes de Implementações Práticas (páginas 10 e 11)

Um Exemplo de Aplicação Prática (páginas 13,...)

## As premissas sobre as quais eu me apoiei para construir um modelo útil para previsão da série de preços de Inepar (INEP4):

- Uma única ação (mais simples);
- Liquidez restrita, mas ainda significativa, de aproximadamente R\$ 1MM/dia e 50 negócios/dia (em casos como este é possível observar melhor a relação entre os diferentes tipos de *traders*);
- Os diferentes tipos de *traders* para Inepar:
  - **Traders tipo A:** são aqueles cujas ofertas ou demandas pelo papel são geradas a partir do conhecimento dos fundamentos econômicos, operacionais e financeiros da empresa em si. São aqueles que enxergam apenas a empresa por detrás da ação e entendem deter um preço-alvo para o ativo, a se realizar em um determinado prazo. Se o preço corrente de mercado ( $p_m$ ) for menor do que o preço-alvo trazido a valor presente ( $p_a$ ), este *trader* compra (demanda  $d_a > 0$ ), e, em caso contrário, ele vende ( $d_a < 0$ ) o papel. Este grupo, ao interagir com os demais, tende a gerar um processo estocástico em que há grandes movimentos discretos (saltos ou *jumps*). A demanda, em número de ações ( $n_a$ ), que estes agentes geram poderia ser assim escrita:  
$$n_a = A * [(p_a - p_m) / p_m]$$
, onde A é uma constante que reflete o poder econômico deste grupo de agentes, relativamente aos outros *players* de mercado;
  - **Traders tipo B:** são aqueles agentes cujas demandas ( $d_b$ ) estão associadas às variações de preços e executam seus tradings, processando – meramente - estas informações de preços, baseados em algum modelo grafista, técnico ou quantitativo. Estes agentes não enxergam a empresa por detrás da ação e se movem exclusivamente por  $dp_m/dt$ , reforçando o fenômeno de reversão para a média;
  - **Traders tipo C:** são aqueles que geram uma demanda ( $d_c$ ) randômica por ações, dentro de um certo intervalo de preços em torno do preço de mercado, caracterizando um Movimento Geométrico Browniano. Estes agentes não se guiam pela variação do valor econômico da companhia nem pelas variações de preços. Compram ou vendem por uma série de motivos que não se encaixam na mecânica de A ou de B;

# As premissas sobre as quais eu me apoiei para construir um modelo útil para previsão da série de preços de Inepar (INEP4):

- Há um determinado estoque total de ações (F) que pode ser negociado, caracterizando o *float* da companhia (este estoque poderia ser simplesmente caracterizado como uma função saturação);

- Tomando como condições iniciais:

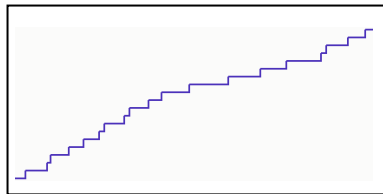
F=3.000.000 de ações;

$p_m$ =R\$20,00/ação;

$p_a$ =R\$40,00/ação;

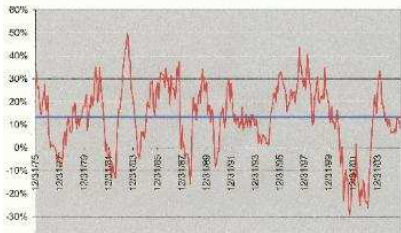
A=1.000.000 de ações;

$d_c$ =[-250.000;+250.000] ações, de forma randômica;



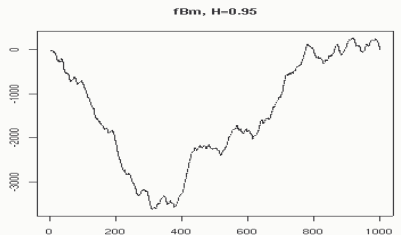
JUMPS (A)

$$P[(N(b) - N(a)) = k] = \frac{e^{-\lambda_{a,b}} (\lambda_{a,b})^k}{k!} \quad k = 0, 1, \dots$$



REVERSÃO PARA MÉDIA (B)

$$d\sigma = -\delta(\sigma - \theta) dt + k dz_2$$



BROWNIANO (C)

$$dP = \mu P dt + \sigma P dz_1$$

Utilizamos métodos de Monte Carlo e de Inclusão Diferencial para realizarmos as estimativas dos parâmetros destas equações diferenciais estocásticas e construímos este gráfico que segue!



# O “*reachable set*” em um plano de preço x demanda para INEP4:

